МАТЕМАТИКА

УДК 517.6

СМЕШАННЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ СХОДИМОСТИ: ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА

В.Д. Погребной, канд. физ.-мат. наук, доцент
Сумский государственный университет, ул. Р.-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007

Продолжается изучение свойств нового понятия в теории пространств абстрактной сходимости – понятия звездной сходимости смешанного типа. Это новое понятие обобщает известное классическое понятие звездной сходимости. Оно важно как в общей теории сходимости, так и при изучении конкретных сходимостей современного анализа. В статье исследуются свойства смешанной звездной сходимости в связи со второй и третьей аксиомами пространств абстрактной сходимости.

В первой части нашего исследования звездных сходимостей смешанных типов мы изучали их свойства, связанные с первой аксиомой пространств абстрактной сходимости. Теперь мы продолжим исследование свойств звездных сходимостей смешанного типа.

Пусть X – пространство абстрактной (σ) – сходимости. Рассматриваем сходимости типов $(kl*\sigma)$; $k,\ l=1,2,3,4$. Поскольку вторая аксиома абстрактной сходимости сама зависит от типа примененных подсетей, то необходимо каждый раз явно указывать, какой именно ее вариант имеется в виду: в случае использования подсетей типа (k), $k=1,2,3,4$, см. [1], обозначаем аксиому символом $(NA2)_k$.

Пусть сеть S сходится в смысле $(kl*\sigma)$ к точке $x_0 \in X$. Будем рассматривать ее подсети типов (k) и (l). При выполнении условия $k=l$ получаем «чистую» звездную сходимость $(k*\sigma)$, $k=1,2,3,4$. Ее свойства относительно аксиомы $NA2$ были рассмотрены ранее ([2, 3, 4, 5]). Рассмотрим отдельно случаи $k<l$ и $k>l$.

1) $k<l$. Пусть T – любая (k) – подсеть сети S, а U – любая (k) – подсеть сети T. Тогда U есть (k) – подсеть сети S ([2, 3, 4, 5]). В силу $(kl*\sigma)$ – сходимости сети S к точке x_0, U имеет (l) – подсеть Φ, которая (σ) – сходится к x_0. Итак: каждая (k) – подсеть U сети T имеет – подсеть Φ, сходящаяся к x_0. Это означает $(kl*\sigma)$ – сходимость сети T к x_0. В силу произвольности (k) – подсети T сети S, получаем выполнение аксиомы $(NA2)_k$ для $(kl*\sigma)$ – сходимости.

2) $k>l$. Пусть T – любая (k) – подсеть S, а U – любая (k) – подсеть сети T. Тогда U есть (k) – подсеть сети S и из $(kl*\sigma)$ – сходимости S к x_0 получаем существование (l) – подсети Φ сети U, (σ) – сходящейся к x_0.

Таким образом, каждая (k) – подсеть U сети T имеет (l) – подсеть, (σ) – сходящейся к x_0. Это и означает, что сеть T сходится $(kl*\sigma)$ к x_0. В силу произвольности (k) – подсети T сети S, получаем выполнение аксиомы $(NA2)_k$ для $(kl*\sigma)$ – сходимости, т.е. верна.

Теорема 1 $(kl*\sigma)$ – сходимость удовлетворяет аксиоме $(NA2)_k$; $k = 1,2,3,4$; $l = 1,2,3,4$.

Перейдем к свойствам $(kl*\sigma)$ – сходимости в связи с третьей аксиомой класса сходимости. В ее формулировке подсеть выбирается два раза. Поэтому для указания точно изучаемого варианта необходимы два индекса: $(NA3)_{kl}$.

Пусть сеть S не сходится $(kl*\sigma)$ к x_0. Допустим, что каждая ее (k) – подсеть T имеет (l) – подсеть U, которая $(kl*\sigma)$ сходится к x_0. Это означает, что для любой подсети Ф типа (k) для сети U существует подсеть F типа (l), которая (σ) сходится к x_0. Рассмотрим случай $k \le l$. Тогда сеть F является (l) – подсетью сети T. Получаем: каждая (k) – подсеть T сети S имеет (l) – подсеть F, (σ) – сходящуюся к x_0. Значит, сеть S сходится $(kl*\sigma)$ к x_0. Противоречие. Следовательно, если $S \xrightarrow{kl*\sigma}\!\!\!\!\!\!/\;\; x_0$, то S имеет такую (k) – подсеть, никакая (l) – подсеть которой не сходится $(kl*\sigma)$ к x_0. В итоге получается такой результат:

Теорема 2 При $k \le l$, $(kl*\sigma)$ – сходимость удовлетворяет аксиома $(NA\,3)_{kl}$; $k = 1,2,3,4$.

ВЫВОДЫ

Проведенные исследования свойств звездных сходимостей смешанных типов представляют интерес в нескольких аспектах. Во-первых, важно выяснить какими свойствами "чистых" звездных сходимостей они обладают как естественные обобщения последних. Во-вторых, представляет теоретический и практический интерес отношения свойств смешанных звездных сходимостей к аксиомам сходимости Дж. Келли и Г. Биркгофа. В-третьих, по аналоги с "чистыми" типами звездных сходимостей, как следующий этап исследований, возникают проблемы возможности модификаций аксиоматики класса сходимости с использованием в аксиомах звездных сходимостей смешанных типов. Такие исследования планируется провести в дальнейшем.

SUMMARY

MIXED STAR CONVERGENCES: FURTHER PROPERTIES

V.D.Pogrebnoy
Sumy State University, 2 R.-Korsakov St., Sumy, 40007, Ukraine

The study of properties of a new concept in the theory of spaces of abstract convergence proceeds is concept of star convergence of the mixed type. This new concept summarizes the known classic concept of star convergence. It is important both in the general theory of convergence and at the study of concrete convergences modern analysis. Properties of mixed star convergence in connection with the second and third axioms of spaces of abstract convergence are explored in the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погребний В.Д. Зіркові збіжності мішаного типу // Матеріали 10-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука. - К., 2004. – С. 485.
2. Погребной В.Д. Конфинальная звездная сходимость // Вісник СумДУ. – 2001. - №4(25). – С. 141-144.
3. Погребной В.Д. Муровская звездная сходимость // Вісник СумДУ. – 2002. - №5(38). – С. 180-183.
4. Погребной В.Д. Квазизвездная сходимость // Вісник СумДУ. - 2002. - №6(39). – С. 183-186.
5. Погребной В.Д. Изотонная звездная сходимость // Вісник СумДУ. – 2003. - №8(54). – С. 85-87.

Поступила в редакцию 10 июля 2006 г.